



Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação

12 Páginas

2013

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	10 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
4.3.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	15 pontos
7.	15 pontos
	160 pontos
TOTAL	200 pontos

**A classificação da prova deve respeitar integralmente
os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

Itens de seleção

ESCOLHA MÚLTIPLA

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorreta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de construção

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

Níveis	Descritores
3	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
2	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
1	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	<p>É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto.</p> <p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p>
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	<p>Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista.</p> <p>Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.</p>
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:</p> <ul style="list-style-type: none"> – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista; – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	<p>Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p>
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p>
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p>
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	<p>A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.</p>
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:</p> <ul style="list-style-type: none"> – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	A	D	B	C	A
Versão 2	C	A	B	D	D	C	B	B

GRUPO II

1.1. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ na forma algébrica 2 pontos

Obter z_1 na forma algébrica 1 ponto

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica 3 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador 1 ponto

Efetuar a multiplicação do numerador 1 ponto

Efetuar a multiplicação do denominador 1 ponto

Referir que $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ 3 pontos

Determinar w 5 pontos

Escrever $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica 3 pontos

Obter $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ na forma trigonométrica 2 pontos

Obter w na forma algébrica 1 ponto

2.º Processo

Escrever $2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ na forma algébrica 2 pontos

Obter z_1 na forma algébrica 1 ponto

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica	6 pontos
Escrever z_1 na forma trigonométrica	2 pontos
Escrever z_2 na forma trigonométrica	2 pontos
Efetuar a divisão na forma trigonométrica	2 pontos
Referir que $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$	3 pontos
Obter w na forma trigonométrica	2 pontos
Obter w na forma algébrica	1 ponto

1.2. 10 pontos

Determinar $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica	4 pontos
Escrever $\text{cis } \alpha = \cos \alpha + i \text{sen } \alpha$	1 ponto
Escrever \bar{z}_2 na forma algébrica	1 ponto
Obter $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica	2 pontos
Escrever uma condição para que a imagem geométrica de $z_3 + \bar{z}_2$ pertença ao eixo real	3 pontos
Obter o valor de α	3 pontos

2.1. 15 pontos

Seja A o acontecimento «a bola ser preta», e seja B o acontecimento «a bola ter número par».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Identificar o pedido com $P(A B)$	2 pontos
Escrever $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente)	1 ponto
Calcular $P(A \cap B)$	4 pontos
Escrever $P(A) = \frac{2}{5}$ (ou equivalente)	1 ponto
Escrever $P(B A) = 0,2$	2 pontos
Obter $P(A \cap B)$	1 ponto
Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$	4 pontos
Escrever $P(\bar{B} \bar{A}) = 0,4$	2 pontos
Obter $P(\bar{A})$	1 ponto
Obter $P(\bar{A} \cap \bar{B})$	1 ponto
Calcular $P(\bar{A} \cap B)$	2 pontos
Calcular $P(B)$	1 ponto
Obter $P(A B)$	1 ponto

2.2. 15 pontos

Seja C o acontecimento «as duas bolas são brancas».

Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Referir que, se existem n bolas, então estão $\frac{2}{5} \times n$ bolas pretas na caixa OU estão $\frac{3}{5} \times n$ bolas brancas na caixa 3 pontos

Escrever $P(C) = \frac{7}{20}$ (ou equivalente) 2 pontos

Determinar n 10 pontos

Obter a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca 2 pontos

Obter, em função de n , a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca se a primeira bola retirada foi branca e não houve reposição 3 pontos

Obter $P(C)$ em função de n 3 pontos

Obter n 2 pontos

3. 15 pontos

Escrever $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B})$ 2 pontos

Escrever $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ 2 pontos

Obter $P(A \cap B)$ 2 pontos

Escrever $P(A | \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ 2 pontos

Escrever $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ 2 pontos

Obter $P(\overline{B})$ 2 pontos

Obter $P(A)$ 3 pontos

4.1. 15 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 7 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1}$ 1 ponto

Levantar a indeterminação 6 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{x}}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4(e^{4x} - 1)}{4x}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4(e^{4x} - 1)}{4x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{4(e^y - 1)}{y}$
(ou equivalente) (**ver nota 1**) 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	1 ponto
Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$	1 ponto
Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$	7 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$	1 ponto
Levantar a indeterminação	6 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}$	
(ou equivalente) (ver nota 2)	2 pontos
Escrever $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y}$	1 ponto
Referir o limite notável $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	1 ponto
Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$	1 ponto
Concluir que o gráfico de f não admite outras assíntotas verticais por f ser contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que $x \rightarrow 0^-$ é equivalente a $4x \rightarrow 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se o examinando referir que $x \rightarrow 0^+$ é equivalente a $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. 15 pontos

Determinar $g'(x)$ em $]0, +\infty[$	6 pontos
Determinar $(x \ln x)'$	2 pontos
Determinar x'	1 ponto
Determinar $(\ln^2 x)'$	2 pontos
Obter $g'(x)$	1 ponto
Determinar o zero de $g'(x)$ em $]0, e]$	2 pontos
Estudar a função g quanto à monotonia em $]0, e]$	4 pontos
Concluir que g' é negativa em $]0, 1[$	1 ponto
Concluir que g' é positiva em $]1, e]$	1 ponto

Concluir que g é decrescente em $]0, 1]$ (**ver nota 1**) 1 ponto

Concluir que g é crescente em $[1, e]$ (**ver nota 2**) 1 ponto

Concluir que a função g tem um mínimo em $]0, e]$ 1 ponto

Concluir que a função g tem um máximo relativo em $]0, e]$ 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando referir que g é decrescente em $]0, 1[$, em vez de $]0, 1]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se o examinando referir que g é crescente em $]1, e]$, em vez de $[1, e]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.3. 15 pontos

Equacionar o problema 7 pontos

Determinar a altura do triângulo $[ABP]$ referente a $[AB]$ 3 pontos

Escrever $|g(x)| = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) 4 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 2 e 3**) 4 pontos

Obter as abcissas dos pontos P 4 pontos

Indicar as abcissas dos pontos com ordenada positiva ... (1 + 1) .. 2 pontos

Indicar as abcissas dos pontos com ordenada negativa ... (1 + 1) .. 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando escrever $g(x) = \frac{2}{3}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.
2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
3. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5. 15 pontos

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:

- A) identificar a opção que pode representar a função g ;
- B) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção I;
- C) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção II;
- D) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção III.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
Níveis	6	Na composição, são contemplados corretamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	8	9	10
	3	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	5	6	7
	2	Na composição, é contemplado corretamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	3	4	5
	1	Na composição, é contemplado apenas o ponto A.	2	2	2

* Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

6. 15 pontos

Equacionar o problema 2 pontos

Determinar $g'(x)$ 5 pontos

Escrever $(\sin(2x) - \cos x)' = (\sin(2x))' - (\cos x)'$ (ou equivalente) 1 ponto

Determinar $(\sin(2x))'$ 2 pontos

Determinar $(\cos x)'$ 1 ponto

Obter $g'(x)$ 1 ponto

Resolver a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$ 8 pontos

Escrever $2(\cos^2 a - \sin^2 a) + \sin a = \frac{1}{2}$ 1 ponto

Substituir $\cos^2 a$ por $1 - \sin^2 a$ 1 ponto

Obter $-8 \sin^2 a + 2 \sin a + 3 = 0$ 1 ponto

Obter $(\sin a = -\frac{1}{2} \vee \sin a = \frac{3}{4})$ 2 pontos

Reconhecer que a equação $\sin a = \frac{3}{4}$ é impossível em $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.. 1 ponto

Obter a 2 pontos

7. **15 pontos**

Referir que $f(x) = f(x+a)$ é equivalente a $f(x) - f(x+a) = 0$ 2 pontos

Referir que, em $[-a, 0]$, a função g , definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$, é contínua (**ver notas 1 e 2**) 2 pontos

Calcular $g(-a)$ 2 pontos

Calcular $g(0)$ 2 pontos

Escrever $g(-a) \times g(0) < 0$ (ou equivalente) 3 pontos

Concluir que a função g tem, pelo menos, um zero em $] -a, 0[$ (**ver nota 3**)..... 3 pontos

Concluir o pretendido 1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se o examinando referir que a função é contínua em $] -a, 0[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.